

第 43 回全国数学教育学会

2016 年 1 月 31 日

於：広島大学

## 世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2)<sup>1</sup>

～電卓を用いた実践を通して～

兵庫教育大学 濱中 裕明  
北海道教育大学 大滝 孝治  
上越教育大学 宮川 健

### 1 はじめに～SRP とは

あるとき複数の高校生に、算数と数学の違いとは何だろうかと尋ねたことがある。そのときの回答は意外なものだった。半数以上の高校生が、算数ではどうしてそうなるのかを大事にするけれども、数学はどうしてそうなるかよりも、定理とその使い方を覚える学問だと思うと答えたのである。これは、中等数学教育、とくに高校での数学学習における課題を浮き彫りにする回答だったと思う。では、そもそも中等教育段階において、我々が生徒たちに望むべき、数学学習の態度とはどのようなものなのだろうか。

教授人間学理論 (ATD) では、そうした「何を学習すべきなのか—何が教授争点になりうるのか—、そして何がその争点を学習する形態となるのかを暗黙裡に規定する規則の集まり」(Chevallard, 2015)のことを「教授パラダイム」と呼ぶ。上で述べた高校生の意識を教授パラダイムとして考えれば、教師から与えられた数学的内容を、試験での使い方を中心に学ぶ、ということになるのだろう。その際、どうしてその数学的内容が与えられるのか、そこは生徒にとって争点にならない。おそらく定理の名前などから過去の偉人の作品なのだろう、とわかる程度である。そして、どうしてこの内容が試験に出るのか、についても理由はない。Chevallard はこうした、過去の偉人の作りあげた作品を、鑑賞するように、順々に学習していく、という教授パラダイムを「記念碑主義」と呼んだ。ここでは、「なぜこれが生じたのか」「何の役に立つのか」という問いは扱われず、知識の存在理由も消失してしまう。また、未知の知識を要する問題であれば、これは未習であると投げ出すことになる。

これに対し、記念碑主義にとって代わるべき新しい教授パラダイムとして、Chevallard (2015)は、「世界探究パラダイム」を提案する。世界探究パラダイムとは、自分自身の目の前にある問い  $Q$  に答えるために、その中で価値のある回答  $A$  を発見し、そこに到達するために、学習し、その過程で未知の状況や問題が発生してもためらわない、といった学習態度を指す。

そうした「世界探究パラダイム」に基づく指導・学習の過程として、Chevallard (2006)は SRP (Study and Research Paths) という学習過程を提案している。SRP とは研究者が知識を生み出す探究の過程をモデルとしており、その過程においては知識の「学習 (Study)」と未知の問題を解決していく「研究 (Research)」との相互作用が想定されている。具体的には、まず、その解決過程において数多くの問いや疑問を生み出すような「生成的な強い力」を持った最初の問い  $Q$  を学習者に与える。学習者は、この問いに答えるため、メディアを参照しながら学習し、考察を進める。旧来、このメディアといえば、図書館を象徴とした文献を指すことが多かった。しかしながら、現在ではインターネットという簡便かつ広大でア

<sup>1</sup> 本研究は、JSPS 科研費 15H03501 及び全国数学教育学会ヒラバヤシ基金の助成を受けています。

クセス・検索が容易なメディアがある。今回の SRP では、このインターネットアクセスの存在を前提とし、問いを考察させていく。しかしながら、後述するようにメディアから見つかる（部分的な答え） $A^{\circ}$ は、往々にして新たな問いや学習の必要性を示唆するものとなる。新たな問いの解決や必要な学習を、メディアやミリューと相互作用しながら解決することは、当然また新たな問いや学習を引き起こす。こうした連鎖的な学習過程を定式化したものが SRP である。後述するように SRP では、通常の授業とは全く異なる教授学的契約の成立を要求し、前提としている。

本稿では、教員養成課程の学部生を対象として、電卓を用いた題材について SRP に基づいた授業実践を行い、その分析を行った。それにより、次のような点から考察を述べたいと思う。まず、通常の授業とは異なる教授学的契約に基づいて、学生たちにどのような論証活動が生じていたのか。また、具体的な SRP の実践のなかで、学生はどのような教授学的契約を抱え、それが論証活動をどのように束縛・促進していったのか。さらに、よりよい論証活動を促進するには、教師はどのような役割を担えばよいだろうか。

そして、そうした分析を踏まえ、論証活動を含む数学的活動としての SRP の可能性を本研究では探っていきたい。

## 2 SRP と RLA や数学的活動

SRP の具体的な定式化は、別稿（宮川・濱中・大滝, 2016）で述べることにし、ここでは SRP の目指している趣旨・目的が何であったかを確認し、関連する指導モデルと比較して SRP の特徴を整理しておく。世界探究パラダイムに基づく SRP と古いパラダイムに基づく従来の指導との違いは、「教授学的契約」の差異として明確に表れており、その結果としてその指導で行われる論証活動の差異を生むと考えられる。

通常の授業における教授学的契約においては、数学的結果や真理は教授者の中にあり、その教授内容や教授内容と課題の整合性の責任は教授者がもつことになる。つまり学習者は、教授者の与える内容を用いて課題に取り組む。結果として、未知の問題に取り組めないことは許容され、学習者が分からないときは、しばしば教授者がヒントを出すことになる。また、学習内容の真理性に学習者本人が責任を持ち、他者に説明できるほどに把握・理解することは稀となる。

一方、SRP における教授学的契約では、未知の問題であっても、自分で取り組み、結果を出そうとすることが求められ、その過程で新たな内容を学習する必要性が生じることが前提となる。その際、学習する内容に対する責任は、学習者が持つことが求められる。またこのとき、教授者は、アドバイザーであって、学習の主体は学習者本人である。

前述のように SRP は研究者の探究活動をモデルとしているが、本来、研究者が自分の研究成果に責任を持つことは当然である。つまり、研究者の探究活動をモデルとしていることが、こうした教授学的契約を生じさせる要因の一つとなっているわけであるが、研究者の活動をモデルとした学習活動として、RLA(researcher-like activity)というものがある。RLA とは、市川伸一(1998)によって提起されたもので、「研究者の活動の縮図的活動を学習の基本形態とする」学習活動のことである。すなわち、実際の研究者が行っている活動を、学習者のレベルに合わせて模擬し、そうした活動を通して、学習者の意欲を引き出す教育実践のことである。本来 RLA という用語自体は「研究者の活動を模擬する」ということ以上の詳細な活動の定式化を含んでいない<sup>2</sup>が、狩俣(1996)は、数学の研究者による活動を「問題の発見 → 解決 → 論文等作品化 → 発表 → 相互評価 → 知識の共有」と捉え、これを模した形で、「問題の発見」を「基本となる問題からの条件の変更による問題作り」に置

---

<sup>2</sup> その意味では、SRP もまた RLA の 1 つであるともいえる。

き換え、授業展開を行っている。この指導モデルは、RLA の一つに他ならない<sup>3</sup>が、ここではこの狭義の RLA を RLA とよぼう。伊禮(2008)は教員養成課程の教科教育の授業の中で RLA を体験させる授業を行っており、また、濱中・藤原・渡辺(2013)もまた教員養成課程の数学内容論の授業のなかで RLA を展開している。SRP も RLA も研究者の活動をモデルとしているわけだが、この両者の違いは何だろうか。

その最大の違いはメディアの存在を前提とすることであろう。第一筆者は現在も継続して RLA を基にした授業を教員養成課程において行っているが、学習者にとって、自分で作った問題を解決する過程で、知識の不足が生じることがほとんどである。結果として、問題の解決の過程では、教授者が多くの知識を与えながら解決を促す形になってしまい、探究としての主体性を大きく失ってしまうことが多い。また、そうでなくても、学習者が自分の知識で解ける範囲に探究を限定してしまうようでは、探究が広がりにくい。これでは、学習の過程で生じた結果にたいして、学習者が責任を持つことが困難となってしまう。一方、SRP ではメディア、特にインターネットへのアクセスを前提とする。実は当初、筆者らもインターネット上に答えがあるような課題は学生に課すものとしてはふさわしくないのではないか、という思いがあった。つまり、数学は自分の知識と思考によって自力で解くもの、という思い(契約)があった。しかしながら、実際の研究者による研究活動においても、我々研究者は先行研究を読み、他者と交流し情報交換を行いながら、自身が興味をもつ探究を進めていくのであり、Chevallard (2006)はこれをメディア・ミリューの往還としてむしろ積極的に指導過程に取り入れているのである。メディアの存在は、一見するとすぐに答えに至ってしまい、ルール違反のようにも感じられるが、数学においては、答えがあればそこから次の問いが生まれるのが自然である。また、インターネットメディアから提示された内容は常にオーソライズされているわけではなく、個人の発信者によるものが多いため、提示された答えが正しいかどうか自分で考える必要がある。また、その真偽の判断ができるようになるためには、また新たな知識・考察が必要となることも多い。こうした一連の展開こそが、本来の数学の研究に近いものである。

また、SRP においては、学習者の探究活動のゴールを必ずしも設定しない。何らかの教えるべき内容をあらかじめ設定し、探究の過程においてそれが生じるように設定した SRP (「目的づけられた SRP」)も考えられるが、探究がどこに行くかを決めずに進めるオープンな SRP を許容する。むしろ、未知の問題にも取り組み、発見した内容に責任を持たせるという教授学的契約を実現する上では、オープンな SRP のほうが有効であろう。我が国の中等数学課程においては、数学的活動が指導に位置付けられているが、当然のことながら学習指導要領のもとで行われる実際の数学的活動においては、何らかの指導すべき内容が設定されているのが普通である。濱中・加藤(2013)は、数学者の研究の縮図として構造指向の数学的活動のモデルを提案しているが、そこでも教授者が意図するゴールというものが設定されている。しかし、本来的に研究とは自由であり、研究者の研究の方向性が他者によってあらかじめ設定されていたり、強制されたりすることは不自然であるし、そうしたことは研究者の意欲を削ぐ結果となろう。そこで、今回の実践では、SRP としての教授学的契約の成立を意図し、オープンな SRP の実践を行うこととした。

### 3 実践の内容

今回の実践は、教員養成課程の学部生 3 年生 9 名(うち 1 名が留学生)を対象としたもので、90 分の授業 4 回を通して行った。今回の SRP においては、インターネットアクセス

---

<sup>3</sup> 市川(1998)は「学生が査読者になるゼミ」、「パネル討論式授業」、「学生が講演者になるゼミ」などを実践している。

を前提として探究に取り組むわけであるが、9名の学生を3名ずつの3グループに分け、グループごとに探究を行うこととした。その際、グループ分けは授業者が指示し、各グループに数学的な探究をリードできそうな学生が1名は含まれるように配慮した。

- 第1回(2015年12月4日)

今回の学習は研究者の活動を模した活動を行う、ということを説明し、次の課題を「最初の問い」として与えた。

$Q_0$ : 四則演算と平方根のボタンしかない通常の電卓で、与えられた数の3乗根を計算するにはどうすればよい?

また、一般に研究者が研究を行う際に先行研究にあたるのと同様にして、今回の活動ではインターネットが利用できることを説明し、各グループに1台のノートパソコンを貸与し、また、各学生に四則演算と平方根のボタンをもつ電卓を貸与した。そのうえで、次の注意を与えた。

- この授業では、授業者によって意図された探究のゴールは存在しません。自分で、ゴールを作ってください。
- 第4回には、グループ毎の探究成果の発表を行ってもらいます。
- ゴールとは、そこで他のグループに賞賛してもらえるような探究です。
- 最初の問いは、探究始まりの入り口にすぎません。自分たちの頭に浮かんだ新たな問いを大事にしましょう。
- グループでの探究を促進していくためにも、頭に浮かんだ「問い」やアイデアはなるべく言葉に出しましょう。
- また、グループでの対話から探究が進んだときは、メモとしても残していきましょう。
- インターネットを自由に閲覧していいですが、そこにあることが正しいとは限りません。つねに批判的に評価していきましょう。

そのうえで、グループごとに探究活動を行わせた。授業者は机間巡視をしながら、各グループの探究の様子を聞き、アドバイスをしていた。

- 第2回(2015年12月11日)

- 第3回(2015年12月18日)

第2回、第3回は継続して探究活動を行わせた。第4回が全体の発表会となることから、第3回の終了時には次回までに発表の準備をしておくことを指示した。その際、前日までに発表の提示資料について授業者から確認をうけること、また、第4回の発表の際には聴講者として大学院生も参加することを伝えた。

- 第4回(2016年1月8日)

各グループによる発表と質疑応答を模擬学会形式で行った。発表は1グループあたり30分以内とした。

## 4 アプリオリ分析

数学教授学においては、実践の際にアプリオリ分析を行うことが一般的である (cf. Barquero & Bosch, 2015; 宮川, 2011)。これは、実践の中で実際に生じる状況を考察する前に、どのような状況が理論的に想定されるかを考察し、実際の状況を理論的枠組みのなかで位置付けるために行うものである。

### 4.1. 数学内容について：

まず、今回の実践において設定した  $Q_0$  からどのような数学的内容が展開できるかについて

て述べておく． $Q_0$  自体はよく知られた問いであり（大野, 1992; 野崎他, 2002; 渡邊, 2004），インターネット上で、適当なキーワードを用いて検索すると、通常の電卓を用いて 3 乗根を計算する方法についての情報は多くみられる．例えば、5 の 3 乗根を求める場合、次のような 2 通りの方法が考えられる．以下、 $\boxed{\times}$  のように四角で囲んでいるのは電卓のボタンを示すこととする．

➤  $\boxed{1}, \boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{=}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{=}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{=}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \dots$

というように、適当な値を入力したのち、 $\boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{=}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$  を繰り返し入力すると、繰り返し部分を入力した直後の値は、5 の 3 乗根に近づいていき、やがて変化しなくなる．変化しなくなったときの値が、5 の 3 乗根の近似値を示している．

この方法の妥当性は、 $a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5 \times a_n}}$  という漸化式で与えられる数列が 5 の 3 乗根に収束することから導かれる．

➤  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$  というように、 $1/3$  は初項  $1/4$  で公比  $1/4$  の等比無限級数で表されるので、これを用いると、

$$\sqrt[3]{5} = \frac{1}{5^4} \times \frac{1}{5^{16}} \times \frac{1}{5^{64}} \times \dots$$

と表すことができ、このことから、

$\boxed{5}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\times}, \boxed{5}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\sqrt{\phantom{x}}}, \boxed{\times}, \dots$

という入力が続けることで、5 の 3 乗根に近づいていくことが帰結される．

このように、インターネットで直ちに得られる手法についてみても、数列・漸化式・極限・収束・指数法則・級数などといった、高等学校で学ぶ標準的な数学的内容（ATD の言葉を用いれば作品  $O_i$ ）と結びついていることが分かる．また、前者の方法において、繰り返し部分の $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$ を押す回数を増やすとどうなるだろうか、また、3 乗根ではなく 5 乗根、7 乗根など、一般の  $n$  乗根を求めるにはどうすればいいか等、最初の問い  $Q_0$  を基にして、あらたな数学的な問いが豊富に考えられる．そのほか、後者の方法においては  $1/3$  を  $1/2$  のべき乗の和に分解しているが、これは  $1/3$  の 2 進数の小数表示に他ならず、探究を進めていくと 2 進数や整数論との関わりなども生じ(濱中, 2014), 高等学校で学ぶ標準的な数学だけでなく発展的な内容への展開の可能性までを有している問いであることが分かる．

実際、学生はどのような探究経路を選択するだろうか．例えば、次のような問いが考えられる．

- 通常の電卓で  $n$  乗根を求めるにはどうすればいいか<sup>4</sup>．
- $1/n$  を 2 進数の小数にするには、どうすればいいか．
- どうして平方根を用いた  $n$  乗根に収束する漸化式が存在するのか．

<sup>4</sup> 例えば、4.1 節に述べた前者の方法で繰り返し時に $\sqrt{\phantom{x}}$ を押す回数を変えると、 $2^p - 1$ 乗根の近似が得られる．もちろん、その他にも 2 進数を用いる手法などが存在する．

- どんな奇数も、ある自然数  $p$  に対して  $2^p - 1$  の約数となるのか。そうだとすればどうしてか<sup>5</sup>。

ここに挙げた問いのうち、上の2つはどのようにすればよいか(how?) を問う応用数学的なものであり、後者の2つはなぜ(why?)を問う純粋数学的なものである。このように学生の探究の経路は2種に大別することができるだろう。

#### 4.2. 教授学的契約について：

第1回の授業での説明で授業者から与えた諸注意は、実際には教授学的契約の提示である。特に、次の2つの探究型の教授学的契約がここで強調されている。

- 探究のゴールは設定していないこと。自分で、探究の方向性を選択し定めていくことが求められること。
- また、求められる探究とは、他のグループに称賛してもらえるような探究であり、そのような探究をおこなうべきこと。

このような教授学的契約のもとで、学生はどのような問いを選択していくだろうか。最初の問い  $Q_0$  自体、どうすればよいかという“how?”の問いから始まっていることもあり、学生は“how?”の応用数学的な問いから始めるであろうが、論証を基本とするこれまでの数学学習規範から“why?”をゴールとすべきという教授学的契約をもっているのではないだろうか。つまり、最終的には“why?”に答えようとする論証活動に至ることが予想される。

また、上述のように  $Q_0$  に対する回答の記述はインターネット上に多く見られ、そこから  $n$  乗根を求めるという発想は自然である。実際、 $n$  乗根を電卓で求める方法に関する記述もインターネット上にすぐに見つかる。しかしながら、一方で「求められる探究は、ほかのグループに称賛してもらえるような探究である」という教授学的契約を最初に強調しており、インターネット上にすぐに見つかる結果では、よい探究とは言えないと学生は考えるのではないか。そこから探究の深まりを追及する姿勢が生まれると期待できる。

次に、生じる論証の質について考える。論証とは独白的なものではなく、伝達の対象が論証の質に影響を与えるだろう。学生が、学生を対象として発表するものという認識であれば、数学的な厳密さよりも直観的な把握を目指す簡潔さが重要視される可能性がある。そのため、今回は「発表会」の聴衆として、大学院生を加えることで、きちんとした発表、厳密な論証をする必要があるという教授学的契約を強調しようと考えた。

#### 4.3. メディア・ミリューの往還について：

インターネット上に今回の  $Q_0$  に関する情報が充実していることから、学生が  $A^\diamond$  を発見するのは容易であろう。しかし、インターネット上の  $A^\diamond$  の記述は必ずしも丁寧ではなく、教師が与える知識のように自己完結した記述でもない。そのため学生は、ミリューの一部となる  $A^\diamond$  と相互作用をすることになる。 $A^\diamond$  には様々な数学的な概念や性質 ( $O_i$ ) が含まれるため、それらは新たなミリューの構成要素となり、ミリューと相互作用することでその内容を検証し、吟味しながら、知識の不足があればまたメディア上から情報を探し、得たものを再度ミリューとして相互作用を行なうといったことが生じるであろう。また、たとえ  $A^\diamond$  が完全かつ丁寧なものであった場合も、その記述を理解するためには、ある程度のミリュ

---

<sup>5</sup> 任意の奇数が、 $2^p - 1$  で表される数の約数になるなら、脚注4の手法を使うことで、一般の自然数  $n$  に対して  $n$  乗根が電卓で近似計算できることになる。

一との相互作用が必要である<sup>6</sup>。したがって、探究し  $Q_0$  に対する自らの回答を作り上げるといふ教授学的契約が断絶しない限り、今回の課題ではメディア・ミリューの往還が生じることが予想される。

#### 4.4. $Q_0$ からの問いの進化について：

Garcia らは SRP のための最初の問い  $Q_0$  が満たすべき条件として、次の 3 つを挙げている (e.g, García et al. 2006; García & Ruiz-Higueras, 2013)。

数学的合法性：教授争点として狙われるべき数学の核心をついた内容である。

社会的合法性：数学や学校を超え、社会や世界と関連した内容である。

機能的合法性：数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究へと導く内容である。

数学的合法性・機能的合法性については、上で述べたように、この  $Q_0$  が漸化式・極限・収束・指数法則・整数論・2 進数など豊富な数学的内容と関係していることから、いずれも条件を満たしているといえるだろう。しかしながら、社会的合法性については、あまり満たしているとは言えない。電卓は、日常的な道具ではあるものの、やはり計算の道具であり、学生にとってこれを社会的に捉える、というよりも、数学の世界に属するものと認識することが一般的だろう。

以上の考察から、今回の実践においては、社会的動機付けは期待できず、数学的な動機付けと「探究を要求されている」という教授学的契約に依存する形で、問いが連鎖していくことが予想される。したがって、仮に数学的な動機付けによる問いの連鎖が停滞したとき、すなわち、手にした数学の内容から数学的必然性による新たな問いが生じなくなったとき、「新たな問いを立てよ」という教授学的契約のみに従った問いの設定が生じると考えられる。つまりその状況は、ミリューとの相互作用が途切れ、「それまでの探究と新たな問いの関連が途切れる」という現象として表出すると考えられる。

#### 4.5. 授業者の役割と立場について

通常の授業においては、授業者は、当然ながら授業におけるメインメディアであり、教授争点に関する決定的な情報を与えるが、今回の SRP では主たる情報はインターネットによってもたらされるという意味で、教師のメディアとしての機能は従来よりも低い。しかしながら、これまでの数学学習における教授学的契約は様々な形で、学生の SRP の遂行を制約することが想定される。特に新たな問いを自分の価値基準を基に設定するという作業は、学生にとって困難なものであることが予想される。その際、「メインメディアとしての授業者」という教授学的契約が強く残っていれば、「授業者に対してどんな  $Q$  を立てればよいかをたずねる」といった現象が見られると考えられる。このように、授業者と学生間のコミュニケーションの形で、学生が授業者をどのように捉えているか、という教授学的契約を分析することができるだろう。

### 5 学生の探究の様相

3 人の学生からなる 3 つのグループをそれぞれ 1 班～3 班とよぶこととし、それぞれの班の探究の様相を、以下に説明する。

---

<sup>6</sup> なお、大学生のレポート課題に対し、インターネットで見つけた回答をコピーアンドペーストして、内容を理解せずに提出する者が見られる。これは、メディアから  $A^\diamond$  を得ているが、それを含むミリューとは相互作用せずにレポートを作成したことになる。

## 5.1. 初回の授業について

初回の授業では、冒頭に今後の活動についての諸注意・課題の提示ののち、直ちに各班に分かれて探究活動を開始したが、探究の内容には大きな差異はなかった。しかしながら、班全体を通して特徴的であったことをいくつか挙げる。

- ・どの班もはじめ、インターネットの利用は極めて限定的で、今回の活動ではインターネット接続は許容されているということを再説明する必要があるほどであった。
- ・やがて、インターネットで電卓による 3 乗根の計算方法を解説するサイトに各々たどりつき、その説明内容を理解するために班ごとに議論を始めた。どの班も 4.1 節で述べた方法のうち前者の方法を取り上げていた。
- ・しかし、3 乗根の求め方について、漸化式を考えるなどの一通りの解決を見たあとは、次の問いとして何を設定すればいいのか、戸惑っていた。この時点で 3 乗根を、 $n$  乗根に変えて、一般のべき乗根の求め方を考えるという問いの設定はほとんど見られなかった。アプリオリ分析での予測とは大きく異なった部分である。これについては第 6 節で考察する。

## 5.2. 1 班の探究活動の展開

1 班では、初回の授業で 3 乗根を求める方法とその妥当性の理解にはたどり着いており、第 2 回の授業では、この方法の提案者はどのようにしてこれを見つけたのだろうか、という視点で探究を展開しはじめた。

Q1 四則演算と平方根のボタンしかない通常の電卓で与えられた数の 3 乗根を計算するにはどうしたらいいか。

○ インターネットに出てきた 漸化式を計算する方法

（漸化式）数列  $\{a_n\}$  において、漸化式  $a_1 = a, 4a_{n+1} = a_n + 1 \ (n \geq 1)$

$\therefore 4(a_{n+1} - \frac{1}{3}) = a_n - \frac{1}{3}$

$\therefore a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(a_n - \frac{1}{3})$

$\therefore n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n = \frac{1}{3}$

この漸化式を用いると、平方根を利用して 3 乗根の近似値が求められる。

よって、 $N$  の 3 乗根を求めることができる。

↓

Q2 なぜ  $4a_{n+1} = a_n + 1 \ (n \geq 1)$  の漸化式を求めるのか。

A の 3 乗根の近似方法 ( $\times$ ,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\sqrt{\quad}$ ,  $\sqrt{\quad}$  を繰り返す方法) において、繰り返すごとに得られる値を A のべき乗として表した時の指数を数列と捉えたときの漸化式「 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$ 」に注目して、この漸化式から 3 乗根の求め方が得られることの数学的証明そのものの構造に注目し、この漸化式が「係数  $k$  が  $(1/2)$  のべき乗となるような  $a_{n+1} = k(a_n + 1)$  の形の漸化式で  $1/3$  に収束するもの」であるから、3 乗根が求まっている、ということに気づいた。そして、逆に 3 乗根の指数である  $1/3$  という数からそのような漸化式を逆算していくことを考えよう、という発言をしはじめた。しかし、3 乗根にこだわってはいは、何ら原理が見えてこない。実際、 $n$  乗根など何らかの一般性を持たせなければ、原理や普遍性は得られない。そこで、「君たちの考えている逆算というのは、(3 乗根の 3 ではなく) 他の数でもうまくいくの？」という問いかけを行った。

そこを契機として、 $n$  乗根を求めるとすれば、 $a_{n+1} = k(a_n + 1)$  が  $1/n$  に収束すればよく、そのためには特性方程式が  $1/n$  を解とすればよい、と考え、そこから  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(a_n + 1)$  と



いう漸化式にたどり着いた。そしてこのとき、係数が  $1/2$  のべき乗となる必要があることから、逆に、 $n = 2^p - 1$  の形で表されるとき、 $n$  乗根が電卓で求められるという結論にたどり着いた。

その後、「では、逆にどんなのが求められないの？」と、問いかけたところ、5 乗根が今までのアイデアでは求められないことに気づき、一般のべき乗根の電卓での求め方について調べていった、というところで時間が終了した。

続く第 3 回の授業では、冒頭、5 乗根の計算方法をインターネットで調べるも、読み解く力が足りず、半ば諦め気味であったので、彼らが閲覧していたサイトを一緒に読み解く手助けを行った。まず、カシオ製の電卓（今回配布しているものがそれに当たる）では、特別な入力方法として、「 $A \div \div B =$ 」と入力すると、「 $B \div A$ 」を計算する機能が備わっている（その説明が読み解けていなかった）。また、彼らが見ているサイトには、この入力方法を用いて、適当な初期値から、「 $\boxed{\div}$ 、 $\boxed{\div}$ 、 $\boxed{A}$ 、 $\boxed{=}$ 、 $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$ 、 $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$ 」を繰り返せば、5 乗根が計算できる、という方法論が載っていた。方法が分かったところで、彼らは電卓で実際にこれをして、確認を行った。

そこで、方法論が分かったのだから、3 乗根の時と同様に、これで 5 乗根が求まることを証明してみることを促したが、意外にも、3 乗根のときにはできたことが、この 5 乗根の場合には転移しない。仕方がないので、この場合にも計算結果を  $A$  のべき乗で表した時の指数の変化を漸化式にすることを教示したところ、「ああ、本当だ、前と同じことか」と納得した様子であった。その漸化式を解き、5 乗根が求まることは理解した。

では、3 乗根のときみたいに、一般化はできないのか、と一般化を促したところ、自力で「 $n = 2^p + 1$  と表される  $n$  について  $n$  乗根が計算できる」ということに気づき、発見を喜んでいた。ここまでの、1 班の探究の成果である。

### 5.3. 2 班の探究活動の展開

2 班では、第 2 回の授業の冒頭、学生 K が、考えてきたことを周りの学生に伝えていた。その内容とは、 $x$  が  $a$  の 3 乗根である、つまり  $x = \sqrt[3]{a}$  というのを、

$$x = \sqrt{\sqrt{ax}}$$

と書き換え、右辺の  $x$  に、この式自体を再帰的に代入していくと、

$$x = \sqrt{\sqrt{a \times \sqrt{\sqrt{a \times \sqrt{\sqrt{a \times \cdots \sqrt{\sqrt{ax}}}}}}}}$$

となることから、

$$x = \sqrt{\sqrt{a \times \sqrt{\sqrt{a \times \sqrt{\sqrt{a \times \cdots}}}}}}$$

となるのではないか、というものであった。

この論法は、実際には間違った結論とはなっていないものの、後述するように若干、乱暴な論理展開となっている部分もある。そこで、方程式からその方程式の解に収束する数列を作り出すというこの論法は、得られた数列の収束値が存在することを暗黙裡に仮定し

たやりかたである，ということを伝えたが，上記のアイデアをなかなか切り捨てられない様子で，どうすればこのアイデアを基に論証ができるかを考えていた．そこで，逆に， $x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{ax_n}}$ という漸化式の数列が収束することを別途証明してしまえば，収束値 $x$ が  $x = \sqrt{\sqrt{ax}}$ を満たす，という論法は正しい，ということを伝え，与えられた数列が収束するための判定法などを調べてはどうかと促し，「有界な単調列は収束する，って解析学で習わなかった？」といった問い掛けを行った．これを契機として，何かを思い出したようで，この方針で証明を始めたが，次は次の不等式を解くことに躓いていた．その不等式とは， $a$ を正の定数とするときに，

$$x > \sqrt{\sqrt{ax}}$$

を考える問題であり，実際間違った結果を得ていた．そこで， $y = x$ と $y = \sqrt{\sqrt{ax}}$ のグラフを比べてごらん，といったアイデアを伝えたところ，3人で理解を共有しながら，解決していった．実際， $y = x$ と $y = \sqrt{\sqrt{ax}}$ のグラフを用いることで，漸化式 $x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{ax_n}}$ で与えられる数列が，初期値に依存してどのように収束していくかを視覚的に捉えることが可能となる．

第3回の授業では，2班は，第2回までに考えたことはどういう意味があったのだろうか，ということを振り返っていたようであった．というのも，学生 K のなかには，何か新しい数学的事実の発見がなければあまり価値がないのではないかと，という考えがあり，一つの求め方を別の視点で捉えたり，その原理を視覚化したり別の角度から明らかにする，といった研究に価値が見いだせない様子であった．そこで，そういった研究にも十分意義はあるということを伝えたが，当該学生の研究に対する上記の認識はかなり強固であった．

#### 5.4. 3班の探究活動の展開

3班も初回の授業において3乗根の求め方の理解・妥当性の検証までは至っていたものの，初回の授業において次のような場面があった．彼らもまた， $\boxed{\times}$ ， $\boxed{A}$ ， $\boxed{=}$ ， $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$ ， $\boxed{\sqrt[3]{\phantom{x}}}$ を繰り返す方法において，繰り返すごとに得られる値を  $A$  のべき乗として表した時の指数に注目していたが，具体的な指数

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \frac{43}{128}, \dots$$

を書き出して，次の数がどのように決まっていくかを「1を足して4で割っていく」と表現していた，これを数列と考えていた様子はあるが，それを $a_n$ といった形で書いて漸化式の形で表すことはしていなかったのである．「考えを式で表そう」と促しても，数列 $a_n$ やその漸化式といった表記は直ちに進まなかった．彼らにとって漸化式は，初めから $a_1, a_2, \dots$ といった明示的な形で数列が示されなければ生息できない知識であり，数が次々に立ち現れる現象においてこれを $a_1, a_2, \dots$ とおくと $\dots$ ，といった表記法を自ら用いようとはしなかったことになる．また，数列としてとらえ，漸化式で表すことに気づいたあとは3乗根が求められることの妥当性まで理解できたものの，その後，何を探究すればよいかについて，かなり戸惑っていた．

そしてアプリオリ分析で予測されたように，新たな問いを立てなければならないという教授学的契約のみに依存して問いを設定した結果，三角関数や対数などを通常の電卓で求められないか，といったそれまでの探究の結果と数学的な繋がりが無い問いを設定しよう

としていた。そこで、最初の問題を解決したのだから、その解決を振り返ってそこから数学的な関係をもつ新たな問いを見つけよう、というアドバイスをを行った。

すると、今度は3乗根の近似方法 ( $\boxed{\times}$ ,  $\boxed{\div}$ ,  $\boxed{=}$ ,  $\boxed{\sqrt{\quad}}$ ,  $\boxed{\sqrt[3]{\quad}}$  を繰り返す) において、何度繰り返せば、定常値になるか、ということを実験しはじめた。そこで、「実験ではなくて、理論的に考えよう」と促し、電卓が定常状態になるのはどのようなときか、どうして定常状態になるのか (まるめ誤差があるから)、について考えさせた。定常状態になるための条件を式にしてみることを促したところ、学生 N が、漸化式の解をみて、極限值とのずれに注目すればいいのではないかと、というアイデアを提案した (このアイデアは授業者にとっても想定外であった)。

実際、 $a$  の3乗根を求めるときの漸化式  $x_{n+1} = \sqrt[3]{ax_n}$  を解くと、(初期値を  $a$  とすれば)

$$x_n = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3 \cdot 2^n}}$$

となることは分かっていたので、3乗根からのずれとなる  $a^{\frac{1}{3 \cdot 2^n}}$  の部分が、

$$1.00000001$$

程度まで小さくなるというのが、定常状態の目安となると考えられる (使用した電卓が8桁電卓であったため)。つまり基本的には、

$$a^{\frac{1}{3 \cdot 2^n}} < 1.00000001$$

という不等式を  $n$  について解けばいいわけだが、これを解こうとすると途中、 $\log(1.00000001)$  が式に登場する。そこで、今度は  $\log x$  のマクローリン展開について調べてごらん、とアドバイスを与えた。実は、授業者自身はじめは、この計算がどこまでうまくいくか、先読みし自信がなかったが、計算をすすめると、 $a=2$  の場合、およそ12回の繰り返しで、変化しなくなるはず、という結果が得られ、これは実際に電卓で実験した結果とぴたりと一致するものであった。いくつかの  $a$  の値でも実験を繰り返した結果、 $a$  の値が大きくなっても (たとえば  $a=100$  や  $a=1000$ )、理論値としては必要な繰り返し量がほとんど変化しない、という結果が得られ、彼らが実際に電卓で実験してみると、これもぴたりと実測値と一致した。探究開始の始めは、何をすればいいのかわからない、といった感じであったが、最後には計算結果がぴたりと一致して、本人たちも驚いている様子であった。第3回の授業では、これまでの成果を取りまとめることに終始した。

## 6 得られた示唆

以下では、今回の実践の分析とそこから得られる示唆について述べる。

### ●教授学的契約について／SRPとしての実践の成立

まず、今回の実践において、SRPとしての探究型の教授学的契約が成立していただろうか。具体的なプロトコルから抜き出して示すことは難しいが、以下に述べるいくつかの点からSRPとしての成立を認めることができると考える。一つには、彼らが既知の問題に自分の探究を限定しようとせず、未知の問題へも躊躇なく取り組もうとした点があげられる。実際、3班においては、与えられた数の3乗根の近似値を繰り返し操作によって求める際の必要な繰り返し数について、探究を進めたが、実はその際、授業者にとってもこの問題に一定の解答が得られるのかどうかは半信半疑であった。二点目として、授業者に過度に依

存するという態度も見られなかったことが挙げられる。もちろん、授業者がアドバイスすることはあったが、アドバイスが来なければ何もしない、といった様子はなく、あくまで教師もまた一つのメディアであるという態度で接しており、自分で解決する責任があるという自覚はあったと思われる。三点目としては、メディア・ミリューの往還が見られたことである。どの班も初回の授業においては、インターネットで、電卓による 3 乗根の求め方を示すサイトを見つけて読んでいる。しかし、それを鵜呑みにはせず、電卓で確認したり、自身がすでに確信している数列・漸化式といった理論によって、その方法を再確認したり、理解したりしようとしていた。例えば、1 班ではそうしたメディアの示す方法の理解によって、7 乗根や 15 乗根の求め方に至っている。そして、次にこの方法だけでは 5 乗根が求められないことに自ら気づき、またメディアに情報を求めていった。これは、まさにメディア・ミリューの往還といえるだろう。

また、彼らの探究を見ているとアプリオリ分析において述べた通り、方法論的問いから、論証的な問いへ進む様子が見られた。例えば、1 班においてはメディアから得られた方法論を理解したうえで、その真偽「漸化式  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$  を用いて本当に 3 乗根が得られるの

か」を確かめ、次にその方法の原理の理解「どうして漸化式  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$  を使うのか」

へと向かい、その原理の理解のもとで新たな理論「 $n = 2^p - 1$  のときの  $n$  乗根を求める方法」へと向かっている。また、2 班においても、中盤以降、メディアから得られた方法論の正当性をどのように証明するか、という点に焦点を当てて議論が進んでいる。こうしてみると、学生の間には、数学における価値観として、求め方といった方法論よりもその正当性・妥当性を示す論証に価値があるという態度が認められる。

さらに特筆すべきこととして、授業当初にインターネットを用いてよいことを強調したにも関わらず、どの班も初めはなかなかインターネットの使用を開始しなかったことがある。これは、彼らにとって、数学における考察でインターネットの使用は憚られるものであり、数学では純粋な自力解決を目指すべきである、とする教授学的契約が極めて強いことを示すと考えられる。

### ●問いの進化の要因について

ところで、我々が事前にどのように探究が進むかを検討した際には、中心的な探究の経路は 3 乗根を  $n$  乗根に一般化することであり、「電卓で  $n$  乗根を求めるにはどうすればよいか」という問題に多くの学生が取り組むのが自然だろうとみていた。にもかかわらず、1 班こそ、第 2 回以降に 7 乗根などを考えていったものの、それも授業者からの「3 をほかの数に変えてもうまくいくのか」という問いをきっかけとするものであり、特に初回の授業においては、 $n$  乗根を考える方向への問いの進化は学生から全く発生しなかった。すなわち、 $Q_0$  とそれに対してメディアから得られる  $A^0$  に対して、「どうしてこの方法がうまくいくか」といった与えられた問題の解決に関わる小さな  $Q$  はたくさん出ていたが、 $Q_0$  を別の大きな  $Q$  へ拡大するという進化がなかなか生じなかった。これには次の 3 つの理由があったと考えられる。

#### 1. 教授争点による要因

ATD では学習する対象に相当する概念を教授争点(didactic stake)とよぶが、SRP では問いを教授争点として与える。そして、今回は 3 乗根を電卓で求める問い  $Q_0$  が与えられている。そのため、 $n$  乗根を求めることは、 $Q_0$  そのものを解決するためには必要ないことになる。例えばよく中学校の文字式の導入問題で見られる「1000 個の単位正方形を横につなげた形を、マッチ棒を辺として作った時、必要なマッチ棒の数はいくつか」を調べるときのように、

具体的な数が、文字を用いた式へと一般化される必要が生じるのは、通常、具体的な数が容易に数えられない場合や、具体的な数をいくつか取り替えて問題を考える場面などである。つまり、具体的な数を文字に変える何かしらの目的が存在する。しかし、今回は  $n$  乗根を求めないと解決できない課題に取り組んでいるわけではなく、教授争点として与えられた問い  $Q_0$  の解決には  $n$  乗根への発展・拡大することの必要性・必然性が含まれていない。

## 2. 教授学的契約による要因

しかしながら、今回の SRP では課題を解決せよではなく、問い  $Q_0$  を出発点として数学的な探究に取り組むことが課題であるから、直接の必要性がなくても、探究を展開するうえで、3 乗根を  $n$  乗根に拡張してもよいのではないかと考えることもできる。この点については、数学においてどのようなものが面白いのか、一般的に関心をもたれるか、ということについての認識を学生がもっていなかったのではないかと考えられる。というのも、3 乗根を  $n$  乗根にするという研究に良さを感じるのは、誇張して言えば数学者としての態度（数学者としての契約）ではないだろうか。また、与えられた問い  $Q_0$  の解決に関わる  $Q$  はたくさん生じていたところから、与えられた問いを大きく変えることに対する躊躇（与えられた問題を解くという記念碑主義的な契約）も強かったと考えられる。そもそも、中等教育の数学教育の現況を振り返れば、高校までの通常の学校数学をやってきた大学生にとって、数学的な探究におけるそうした規範や価値観を持っていないことの方が普通であってもおかしくはない。むしろ、こうした SRP や RLA のような活動の後、他者の発表等を聞くといった過程の中で、探究における規範や価値観が培われていくのではないかと。思い起こしてみれば、数学に限らず数学教育学など一般の研究者養成にも、そうした研究の規範や価値観を学ぶ側面がある。つまり、大学院などで様々な学会に参加したり論文を読んだりしていくなかで、徐々に研究者コミュニティで何が研究になるのか理解していくのである。

そう考えてみると、今回  $n$  乗根を考えるに至らなかったことは不思議ではなく、こうした探究規範や価値観も学習の対象になり得る。つまり、SRP は正統的周辺参加（レイヴ・ウェンガー, 1993）という側面も持っているといえるだろう。

## 3. 学生の数学的理解による要因

では、教授争点としての  $Q_0$  に一般化が含意されておらず、これまで探究的な活動に参加したことがない学習者は、自ら問いを一般化・拡大する等、発展させていくことが出来ないのだろうか。

上記において、マッチ棒の本数の問題を具体的な数から文字  $n$  の場合に一般化する例を取り上げたが、ここにはひとつの学習水準の上昇がある。すなわち、文字  $n$  を用いた議論に至るには、 $n$  を個別の数とした場合の計算に十分習熟している必要がある。逆に、十分習熟していればこそ文字を用いた一般化に取り組める余裕が生まれるともいえるだろう。

今回の初回の授業においては、 $Q_0$  に対してメディアから得られた  $A^\diamond$  を理解するだけで精一杯の様子であり、いわば数学的の知識・理解に余力が無かったように見える。「3 乗根を求める」という問題を考える（もしくは理解する）のに、自分の思考力を全て使いきっているような状態では、一般化して考えることには至らないのは自然だろう。そして、やはりこれについても、逆に言えば、 $A^\diamond$  に対して十分に考え、その正当性だけでなく原理までを理解することで、1 班のように探究の問いそのものを進化させる要因が生まれたと考えられる。

次に具体的な問いの進化と論証の事例を班ごとに考察したい。特に、1 班・2 班においては証明の持つ種々の機能の顕在化と、その諸機能の変化と論証の動的な様相が見て取れることが興味深い。

### ●SRP における問いの進化と論証の事例／1 班の場合

Bell (1976)は証明のもつ数学的な意味として3つのセンス、つまり立証や正当化、解明(illumination)、および体系化を区別したが、De Villiers (1990,1999)はその区分を発展させ、証明のもつ機能として、立証(verification)、説明(explanation)、体系化(systematisation)、発見(discovery)、コミュニケーション(communication)、知的チャレンジ(intellectual challenge)の6つを挙げている。この証明の機能の視点から今回の SRP における問いの進化を考察すると興味深い。

初回の授業においては、他の班と同様1班の探究は  $Q_0$  に対する  $A^\diamond$  の観察と分析であったが、特にこの分析における論証の様相が少しずつ変わっていつている。初めは、得られた  $A^\diamond$  (第4.1節で示した前者の方法) の真偽の確認、つまり、証明の持つ立証の機能に基づく論証活動であったが、その後、どうして漸化式  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$  を用いているのか、といった証明の原理そのものへの理解を求めるような説明や解明の機能へと変化していったのである。そして、3乗根の「3」という数から、どのように考えれば  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$  という漸化式が出てくるかという「逆算」(学生の言葉から)を考えている。

一方で面白いのはそこまで進んでいても3乗根以外のべき乗根の近似計算方法を自ら考えようとはしなかったことである。直接の契機は、授業者が「君たちの考えている逆算というのは、他の数でもうまくいくの?」と尋ねたことであった。しかし、その一言を聞くと、これまでの解明・説明の機能に基づいた証明の考察が、一気に発見の機能へと向かうこととなる。すなわち、原理の理解が新しい発見「電卓で、適当な初期値から始めて、 $\boxed{\times}$ 、

$\boxed{A}$ 、 $\boxed{=}$ 、その後 $\boxed{\sqrt{\quad}}$ を  $p$  回」を押すことを繰り返すと、 $A$  の  $(2^p - 1)$ 乗根が得られる」という  $A^\heartsuit$ に至ったのである。

このように1班の探究活動の中では、「立証」「解明・説明」「発見」といった証明の機能が順に顕在化していったことになる。

### ●SRP における問いの進化と論証の事例／2 班の場合

一方で、2班の展開は、また趣が全く異なる。2班では、初回こそ得られた  $A^\diamond$  (第4.1節で示した前者の方法) の真偽を確かめる観察・分析の段階で始まったが、第2回の授業の冒頭に学生 K から5.3節の冒頭に示したアイデア  $A^\heartsuit$ が生じている。

そして、この  $A^\heartsuit$ に対して、授業者による一定の評価が得られたものの、証明としての説得性の不備を指摘されたことにより、この  $A^\heartsuit$ のアイデアを基にした説得性のある証明を行うにはどうすればよいか、という問いに進化しているのである。

ここでは、証明のコミュニケーションの機能が顕在化している。すなわち、言明が正しいかどうかではなく、説得できる証明であるかどうかが重要視され、新たな問いに進化していったといえる。

### ●SRP における問いの進化と論証の事例／3 班の場合

3班は、結果として未知の問いへと進化はしたものの、問いの進化についてはもっとも困難に直面していたといえる。つまり、アプリアリ分析で予想した通り、数学的な関連性に基づいた新たな問いを立てることがなかなか出来なかった。

また、論証という視点からは、特徴的と思われた次の2点を指摘しておきたい。

一つは、漸化式といった概念の生息地が登場したことである。当初、 $A^\diamond$ を検証する過程で生じた数の列、およびその生成規則について理解しつつも、数列の記法や漸化式としての式の記述に至らなかったということはこれまで数学の言葉で記述された数学の問題としてしか、数列の記法や漸化式を用いてこなかった可能性がある。まさに世界探究パラダイムであるからこそ、既存の知識が「世界」に立ち現われ、数学概念の生息地を示す結果になったといえよう。

二点目は、証明の途中で参照したメディアからの  $A^\diamond$  の取り扱いについてである。実際、探究の途中では

$$\log 1.00000001$$

を計算する必要がある場面があった。 $\log$  のテイラー展開を用いると、

$$\log(1+x) = x$$

と近似でき、これにより  $\log 1.00000001$  が簡単に計算できるが、このことに学生が自分から気づくのは困難と予想された。そのため、対数のテイラー展開を調べてごらん、といった指示を出したところすぐにインターネットから当該の情報を引き出し、上記の近似がテイラー展開から上記の近似ができることは理解したのだが、しかし、最終的な発表に至るまで

$$\log x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

というテイラー展開そのものについて調べ、その真偽を確かめようとはしなかった。

インターネットを使ったことで、未知の課題にたいして、有効な未知な道具が見つかるわけだが、その道具に対して、どこまで自分なりの理解をしなければならない、という教授学的契約を学生は持っているだろうか。実際、計算機やエクセルを使った実験によって、真であることの確信は得られてしまうこともある。そのときに、証明しなければならない、という動機はどう生まれるのか。

数学者ですら、メディア上で提示された数学的結果について、既存の知識や結果と整合性のつくようなものであったり、権威のあるメディアであったりするときには、その証明を完全に精査せずとも、その結果が真であることを確信してしまうことはある。特に工学者などでは、ある程度割り切って、テイラー展開をどんどん応用に使うだろう。いわんや学生においてをや、ということになる。

これに対しては、発表という場の教授学的契約の重要性を指摘したい。筆者自身、自分が最初に数学の発表をしたときのことを想起すると、研究の段階とは異なって、発表の準備の際には、例え些細なことであっても論証としての全体の整合性が気になったことを覚えている。つまり、探究の過程と同等に、最後の発表の場の存在、そして、その発表に関わって教授者が学習者と交わす教授学的契約が論証の質の確保の上で、極めて重要となるであろう。

## ●教師の役割について

SRP における教師の役割は、通常の授業とはかなり異なるものとなる。特に、今回はオープンな SRP であったこともあり、教師の側から学習者に伝達すべき内容は存在せず、むしろ各班の探究が進むようにアドバイスすることが基本的な役割となる。これについては、問いの進化についてのアドバイス、論証についてのアドバイスに分けて考えることが出来るだろう。

まず問いの進化についてのアドバイスであるが、これまでの考察にあったように、学習者が研究としての規範や価値観を十分に持っていないことが大いにありうる。そのため、学習者の生み出す問いの方向性に対し、適切な価値観を示唆する必要があるものの、一方

で、学習者が教授者の価値観に強く依存するようになってしまつては意味がない。一見、矛盾ともいえる要請であるが、これに対しては、学習者の問いや成果そのものに対して、良し悪しの判断をするのではなく、学習者の探究へ向けた姿勢・価値観に対して、評価をしていくのが有効であるように感じられた。

さらに、論証についてのアドバイスについては、数学教師として必要な高度な専門性とは何かを考える手がかりとなるように思う。今回の実践から抜き出してみれば、第5.3節の冒頭に示したような、式を再帰的に代入するという学生の論証のアイデアに対して、多くの教師が適切な評価や指導ができるだろうか。例えば、

$$2 = \sqrt{2}^2, 4 = \sqrt{2}^4$$

であり、この式を再帰的に用いると、

$$2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}}, \quad 4 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^4} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^4}}$$

となりそうだが、これは明らかに矛盾しており、再帰的代入による極限操作の危険性を例証している。こうした適切な例を挙げて論証の評価と指導を行い、学生の考えの趣旨を読み取りながらうまく昇華できるように導くのは、かなり困難なことである。SRPの指導で求められる専門性は、現代数学とは異なった方向で、教師にも、数学の探究力が求められるということ、また教員養成課程における数学専門のあり方の方向性をも示していると思う。

## 7 おわりに

ここまで教員養成系学部で行ったSRPの実践を分析・考察してきたが、そこでは探究の文脈を持って論証が展開され、メディア・ミリューの往還のなかで、証明の諸機能が動的に顕在化していく様相が見て取れた。

しかし、SRPは（オープンなSRPにおいては特に）学習内容を意図して行うことは難しく、さらに今回見てきたように、適切な問いの進化の発生の難しさ、また、教師の役割の困難性があることを考えると、なかなか現状直ちには、中学・高校での実践は難しいものがある。しかし、一方で教員養成における実施には意義があるように思える。ヴィットマンら(2004)は教員養成における教科専門科目について、「教科専門科目を授業実践と関連付ける際に、教育内容の選択の問題だけでなく、学生がその内容をいかに習得するかという問題も同時に考慮しなければならない。したがって、「学習能力」の育成は、教師教育の基本的方向でなければならない」と延べ、教科専門科目においては、将来教師となるべき学生が、主体的かつ能動的に学習を進め、自己の「学習能力」を高めることの必要性を強く訴えている。SRPはまさにこの目的にかなうものと言っていいだろう。

なお、今回は、Chevallard (2002) 提示されている探究課程のモデル化のうち、「v) 擁護と例証」については深く取り上げることができなかった。実際、発表の場における教授学的契約の重要性は指摘したが、どのように望ましい契約を強調したり顕在化させたりするかについては考察していない。実際、探究の最中のときの論証の質と、探究をまとめるときの論証の質は異なってくることも予想される。今後、「v) 擁護と例証」の段階までを含めた考察を行う必要があるだろう。

## 参考文献

伊禮三之(2008). 「Researcher-Like Activity による授業の試み ―「ハノイの塔」の条件変更による問題づくりを通して ―」 日本数学教育学会 第41回数学教育論文発表会論文集, P.93-98.



- 市川伸一(1998).「開かれた学びへの出発—21 世紀の学校の役割」(子どもの発達と教育 6) 金子書房.
- ヴィットマン・ミュラー・スタインブリング著, 國本景亀・山本信也訳(2004).『PISA を乗り越えて 算数・数学 授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版社.
- 大野栄一 (1992).『電卓で遊ぶ数学—これぞ究極の電卓使用術』. 講談社.
- 狩俣智 (1996).「Researcher-Like-Activity による授業の工夫—RLA の中学校の数学教育への適用」『琉球大学教育学部教育実践研究指導センター紀要第 4 号』琉球大学教育学部 pp.1-9.
- 野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小沢健一 (2001).『数と計算の意味が分かる』. ベレ出版.
- 濱中裕明・藤原司・渡辺金治(2013).「中等数学科教員養成課程の教科専門科目としての RLA の試み」, 数理解析研究所講究録 1867 「数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究」, pp.117-129.
- 濱中裕明(2014).「電卓を用いた数学教材について」, 数理解析研究所講究録 1920 「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究」, pp.113-120.
- 濱中裕明, 加藤久恵(2013).「高校における構造指向の数学的活動に関する考察」全国数学教育学会会誌『数学教育学研究』第 19 巻第 1 号, pp.27-36.
- 宮川健 (2011).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」. 日本数学教育学会誌数学教育学論究, Vol. 94, 37-68.
- 宮川健・濱中裕明・大滝孝治(2016).「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1) ～理論的考察を通して～」, 全国数学教育学会第 43 回研究発表会発表資料 (於広島大学).
- 文部科学省(2009). 高等学校学習指導要領解説 数学編
- レイヴ・ウェンガー (1993).『状況に埋め込まれた学習—正統的周辺参加』(佐伯胖訳). 産業図書.
- 渡邊公夫 (2004).「数学的活動とは何か」, 長崎栄三他編 授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方 (pp. 48-67). 明治図書.
- Barquero, B. & Bosch, M. (2015). “Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths”. In A. Watson & M. Ohtani (eds), *Task design in mathematics education* (pp. 249–272). Springer.
- Bell, A.W. (1976). “A study of pupils’ proof-explanations in mathematical situation” *Educational Study in Mathematics*, Vol.7, 23-40, 1976.
- Chevallard, Y. (2006). “Steps towards a new epistemology in mathematics education”. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21-30), Barcelona: FUNDEMI IQS.
- Chevallard, Y. (2015). “Teaching mathematics in tomorrow’s society: a case for an oncoming counterparadigm”. In S. J. Cho (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education* (pp. 173-187). Springer.
- De Villiers, M (1990). “The role and function of proof on mathematics”. *Pythagoras*, Vol.24, 17-24, 1990.
- De Villiers, M (1999). “Rethinking proof with sketchpad”. Key curriculum press, 1999.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L., & Bosch, M. (2006). “Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics”. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 226–246.
- García, F. J. & Ruiz-Higuera, L. (2013). “Task design within the anthropological theory of the didactics: Study and research courses for pre-school”. In C. Margolinas (ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22, pp. 421–430).